



應用多變量分析

課程三

Multivariate ANOVA

多變量變數數分析

One-Way MANOVA資料格式

- 要比較各組平均數的差異，若依變項只有一個的情況，則採用的是單因子變異數分析。如果同時檢驗二個以上的依變項，則可採用多變量變異數分析。
- 以兩個群體而言，在考慮多變量虛無假設時，需符合三個假定：
 - 1. 觀測值獨立。
 - 2. 依變項在每個群體之資料要符合多變量常態性。
 - 3. 共變數矩陣相等。(Box M test)

ANOVA

Homogeneity of Variances

- For three or more variables the following statistical tests for homogeneity of variances are commonly used:
- Levene's test
- Bartlett's test

MANOVA: Box's M Test

- **Box's M tests**: the assumption that the vector of the dependent variables follow a multivariate normal distribution, and the variance-covariance matrices are equal across the cells formed by the between-subjects effects. **MANOVA makes the assumption that the within-group covariance matrices are equal.** If the design is balanced so that there is an equal number of observations in each cell, the robustness of the MANOVA tests is guaranteed.
- Box's test is used to determine whether two or more covariance matrices are equal. Bartlett's test for homogeneity of variance presented in Homogeneity of Variances is derived from Box's test.
- One caution: Box's test is sensitive to departures from normality. If the samples come from non-normal distributions, then Box's test may simply be testing for non-normality.

One-Way MANOVA資料格式

A	n	Y
1	1	y_{11}
	2	y_{12}
	\vdots	\vdots
	N_1	y_{1N_1}
2	1	y_{21}
	2	y_{22}
	\vdots	\vdots
	N_2	y_{2N_2}
\vdots	\vdots	\vdots
I	1	y_{I1}
	2	y_{I2}
	\vdots	\vdots
	N_I	y_{IN_I}

A	n	Y_1	Y_2	...	Y_P
1	1	Y_{111}	Y_{112}	...	Y_{11P}
	2	Y_{121}	Y_{122}	...	Y_{12P}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	N_1	Y_{1N_11}	Y_{1N_12}	...	Y_{1N_1P}
2	1	Y_{211}	Y_{212}	...	Y_{21P}
	2	Y_{221}	Y_{222}	...	Y_{22P}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	N_2	Y_{2N_21}	Y_{2N_22}	...	Y_{2N_2P}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
I	1	Y_{I11}	Y_{I12}	...	Y_{I1P}
	2	Y_{I21}	Y_{I22}	...	Y_{I2P}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	N_I	Y_{IN_I1}	Y_{IN_I2}	...	Y_{IN_IP}

ANOVA與MANOVA的區別

Ex: 分析過程如同ANOVA，但在於MANOVA多考慮在有多項不同特徵同時進行分析。

ANOVA

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_m$$

(計量) (名目)

MANOVA

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_m$$

(計量) (名目)

ANOVA所要檢定的虛無假設 (H_0) 是：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$$

MANOVA所要檢定的虛無假設 (H_0) 是：

$$H_0 : \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \mu_{1g} \\ \mu_{2g} \\ \vdots \\ \mu_{pg} \end{pmatrix}$$

μ_{pg} ：群體 g 、變數 p 的平均數

MANOVA

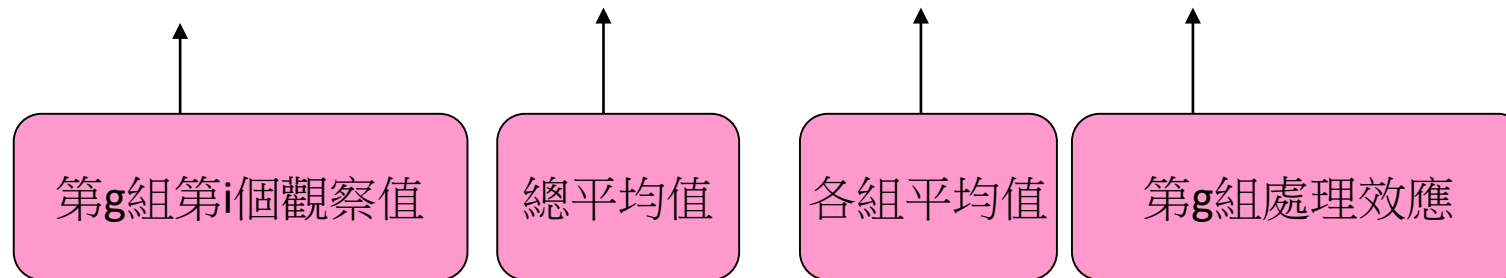
- 在變異數分析中，目的主要是要檢定各族群（組）之平均值是否相等，其假設檢定為：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_G = \mu$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ for } i \neq j$$

每一觀測值的數學模式

$$Y_{gi} = \mu + (\mu_g - \mu) + (Y_{gi} - \mu_g) = \mu + \tau_g + \varepsilon_{gi},$$



$$g = 1, 2, \dots, G(\text{組數}), i = 1, 2, \dots, n_G$$

One-way MANOVA

- 單向多變量變異數分析

$$Y_{gi} - \mu = (\mu_g - \mu) + (Y_{gi} - \mu_g)$$

we have $T = H + E$

where

$$T = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^{n_g} (Y_{jgi} - \bar{Y}_j)(Y_{kgi} - \bar{Y}_k)' \quad df = Gn_g - 1$$

$$H = \sum_{g=1}^G n_g (Y_{jg} - \bar{Y}_j)(Y_{kg} - \bar{Y}_k)' \quad df = G - 1$$

$$E = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^{n_g} (Y_{jgi} - \bar{Y}_{jg})(Y_{kgi} - \bar{Y}_{kg})' \quad df = Gn_g - G$$

Testing for MANOVA

- 整體檢驗法則有：

1. Wilks Λ 值檢定法 (determinant)

$$\Lambda = \frac{|E|}{|T|} = \frac{|E|}{|E+H|} < \Lambda_{\alpha, p, v_H, v_E} \quad \text{reject } H_0 \quad \text{效果值} = 1 - \Lambda$$

where Λ 服從 $\Lambda_{\alpha, p, v_H, v_E}$ 分佈, p 為變數個數, $v_H = G - 1$ 自由度, $v_E = n - G$ 自由度

2. Roy之 θ 值檢定法(determinant)

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{|T|}{|E|} = \frac{|E+H|}{|E|} = |I + E^{-1}H|$$

設 λ_1 為 $E^{-1}H$ 之最大特徵值，則

$$\text{Roy之}\theta\text{值為 } \theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} \dots\dots(\theta\text{值臨界點可查專表})$$

若 $\theta > \theta_{\alpha, S, m, N}$ reject H_0 , where $S = \min(v_H, p)$, $m = \frac{1}{2}(|v_H - p| - 1)$, $N = \frac{1}{2}(v_E - p - 1)$

Testing for MANOVA

3. Pillai and Lawley-Hotelling 檢定法 (trace)

設 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 為 $E^{-1}H$ 不為 0 之特徵值，

Pillai 之 $V^{(s)}$ 統計值為

$$V^{(s)} = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}, \quad s = \min(p, v_H), \quad \text{若 } V^{(s)} > V_{\alpha}^{(s)} \text{ reject } H_0$$

Lawley - Hotelling 之 $U^{(s)}$ 統計值為

$$U^{(s)} = \sum_{i=1}^s \lambda_i$$

$$D = \frac{v_E}{v_H} U^{(s)}, \quad D > D_{\alpha, v_H, v_E} \text{ reject } H_0$$

Remark

- 由於各檢定專表查值不易，所以發展出用近似分佈來做。
 1. Wilks Λ 值檢定法可以轉換為近似卡方值。

$$\chi^2 = - \left[v_E - \frac{1}{2}(p - v_H + 1) \right] \ln \Lambda > \chi_\alpha^2 \quad \text{reject } H_0$$

2. Roy之 θ 值檢定法(GCR)

$$F = \frac{(v_E - d - 1)\lambda_1}{d} > F_{\alpha, d, v_E - d - 1} \quad \text{reject } H_0$$

$$\text{where } d = \max(p, v_H)$$

Remark

3. Pillai 檢定法 (V-statistics)

$$F = \frac{(2N + S + 1)V^{(S)}}{(2m + S + 1)(S - V^{(S)})} > F_{\alpha, S(2m+S+1), S(2N+S+1)} \quad \text{reject } H_0$$

$$m = \frac{|v_H - p| - 1}{2}, \quad N = \frac{|v_E - p| - 1}{2}$$

4. Lawley-Hotelling 檢定法 (T-value)

$$F = \frac{2(SN + 1)U^{(S)}}{S^2(2m + S + 1)} > F_{\alpha, S(2m+S+1), S(2N+1)} \quad \text{reject } H_0$$

採用何者檢定統計量？

- Olson (1973)發現：四種檢定統計量統計檢定力的差異相當小 ($<.06$)。以實務應用來說，採用Roy最大統計量較佳（統計檢定力最高），但此法的限制是需先符合共變數矩陣相等。
- Olson (1974)發現：若資料結構嚴重違反多變量常態性假設時，Pillai trace-statistics V 有較佳的強韌性(robust)。
- Steven (2002)指出多變量分析結果強韌性與共變數矩陣同質性假定有關，此假定也會影響Type I error。若是各組變異數不相等，或各群體樣本數相等，或最大群體樣本數與最小群體樣本數的比值小於1.5， Λ 、 T 、 V 檢定統計量均可使用。

Multiple comparisons

- 處理平均值間複合比較

$$H_0 : c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_G\mu_G = 0 \quad \text{where } \sum c_i = 0$$

$$\text{let } d = c_1\bar{Y}_1 + c_2\bar{Y}_2 + \cdots + c_G\bar{Y}_G = \sum_{i=1}^G c_i\bar{Y}_i$$

$$\Rightarrow \text{Var}(d) = c_1^2\text{Var}(\bar{Y}_1) + c_2^2\text{Var}(\bar{Y}_2) + \cdots + c_G^2\text{Var}(\bar{Y}_G) = c_1^2 \frac{\Sigma}{n} + \cdots + c_G^2 \frac{\Sigma}{n} = \frac{\Sigma}{n} \sum_{i=1}^G c_i^2$$

其假設檢定可以由 T^2 統計值來檢定

$$T^2 = d' \left(\frac{\hat{\Sigma}}{n} \sum_{i=1}^G c_i^2 \right)^{-1} d = \frac{n}{\sum_{i=1}^G c_i^2} \left(\sum_{i=1}^G c_i\bar{Y}_i \right)' \hat{\Sigma}^{-1} \left(\sum_{i=1}^G c_i\bar{Y}_i \right) \sim T_{\alpha, p, v_E}^2 \quad \text{where } \hat{\Sigma} = E / v_E$$

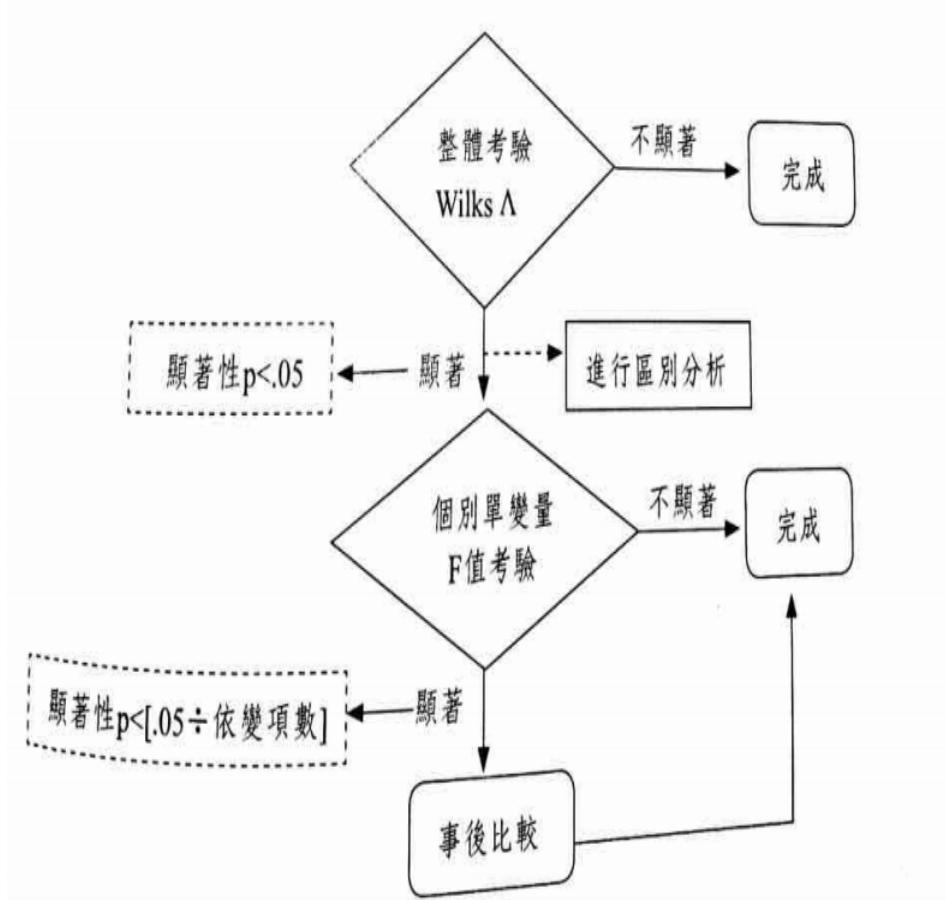
$$\text{亦可使用 Wilks' } \Lambda \text{ Test : } \Lambda = \frac{|E|}{|E + H_1|} \sim \Lambda_{p, 1, v_E} \quad \text{where } H_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^G c_i^2} \left(\sum_{i=1}^G c_i\bar{Y}_i \right) \left(\sum_{i=1}^G c_i\bar{Y}_i \right)'$$

Multiple comparisons

- MANOVA分析步驟分兩個階段：第1個階段進行「整體效果考驗 overall test」，以檢驗k組平均數向量沒有差異的虛無假設。若整體效果檢驗達到顯著水準，則拒絕虛無假設，表示各組樣本至少一個依變項以上的平均數達到顯著水準。
- 至於樣本是哪幾個依變項的平均數差異，則進一步進行「追蹤檢驗 follow-up」，以解釋組間的差異情形。追蹤檢驗包含單變量 ANOVA分析及區別分析。

Tests for univariate equality of the means

單因子多變量變異數分析流程



- 依變項的分組對於自變項的變異來源產生切割：

$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$

(組間+組內)

- 依變項效果：平均數變異檢定

- 1. $F = MS_{between} / MS_{total}$
 - F考驗越大，代表組間差異越明顯
- 2. Wilks' Lambda = SS_{within} / SS_{total}
- Wilks' Λ是指組內矩陣和全體矩陣(組間+組內)的比。Lambda值介於0至1之間，分數越低，代表組間差異越明顯，值為1時表示組間無差異

Remark

1. 在MAVOVA分析下，Hotelling T^2 運用相當頻繁，其和F與t的關係為：

$$\text{If } c\bar{X} \sim N_{p-1}(0, c\Sigma c'), \text{ where } \hat{\Sigma} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'}{n-1}$$

$$\text{then } T^2 = n(c\bar{X})'(c\Sigma c')(c\bar{X}) \sim T_{\alpha, p-1, n-1}^2 \text{ 分佈}$$

其中可推導到 F - test

$$F = \frac{n-p+1}{p-1} \frac{T^2}{n-1} \dots > F_{\alpha, p-1, n-p+1} \text{ reject } H_0$$

$$\text{and } F = t^2$$

Remark

2. *MANOVA*和*simple ANOVA*的差異在於：
*MANOVA*可以表現出變數間的相關。
3. 研究者分析一個以上的依變項時，若假定各變項間有關係存在，則宜用**MANOVA**；若假定各依變項間相互獨立，則宜採用**ANOVA**進行分析。如果各依變項間完全獨立，**MANOVA**和**ANOVA**分析的結果相同。

然而如何判斷依變項間的關係，依據理論或統計分析結果頗費思量。

單因子多變量變異數分析表

變異來源	df (自由度)	SSCP矩陣	Λ
組間	$k-1$	Q_H (或 Q_B)	$\frac{ Q_E }{ Q_H+Q_E }$ 或 $\frac{ Q_E }{ Q_T }$
組內	$N-k$	Q_E	
總和	$N-1$	$Q_T = Q_H + Q_E$	

依變項個數	群組個數	多變量常態資料抽樣分配	F分配的自由度
$p=1$	$k \geq 2$	$\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \binom{N-k}{k-1}$	$(k-1), \sum N-k$
$p=2$	$k \geq 2$	$\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \binom{N-k-1}{k-1}$	$2(k-1), 2(\sum N-k-1)$
$p \geq 1$	$k=2$	$\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \binom{N-p-1}{p}$	$p, \sum N-p-1$
$p \geq 1$	$k=3$	$\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \binom{N-p-2}{p}$	$2p, 2(\sum N-p-2)$

資料來源：Johnson & Wichern, 2007, p. 303

Remark: MANOVA

- 只要因變數Y超過一個（期初成績、期中成績、期末成績...），而不論其因子的數目多寡，皆歸屬於MANOVA的功能。
- 若將SSA以B（Between）矩陣表示，SSE以W（Within）矩陣來表示，則F值可表示為：

$$F = \frac{MSA}{MSE} = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{B/(k-1)}{W/(n-k)} = \frac{n-k}{k-1} W^{-1} B$$

多變量變異數分析的原理

- 當擴充到有多個Y變數的MANOVA，基本的運算邏輯並沒有改變，只是計算上較為麻煩。此時單變量所用的F值將以多變量的F值（稱為Wilk λ ）所取代。
- Wilk λ 也是如上述的F值計算公式一樣，是以誤差（error）的共變異數矩陣與效果（effect）的共變異數矩陣作比較。
- 單變量ANOVA是以SS來計算。
- MANOVA則是以SSCP（Sum of Square and Cross Product，平方和與交叉相乘矩陣）或稱SSP（Sum of Square and Product，平方和與交叉相乘矩陣）矩陣來計算。假設有 p 個應變數，則SSCP矩陣為一個 $p \times p$ 的矩陣。
- 矩陣無所謂大小的問題，它可利用矩陣特徵值來判斷大小。

多變量變異數分析的檢定過程

1. 組內平方和與交叉相乘矩陣 W (Within 或稱 SSPE)

$$W = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)'$$

2. 組間平方和與交叉相乘矩陣 B (Between 或稱 SSPB)

$$B = \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})'$$

3. 總體平方和與交叉相乘矩陣 T (Total 或稱 SSPT)

$$T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y})'$$

4. Wilks' 提出檢定的 Wilks' Lambda 統計量 (λ_i 是 $W^{-1}B$ 的特徵值)

$$\Lambda = \frac{|W|}{|T|} = \frac{|W|}{|B+W|} = \frac{1}{|I+W^{-1}B|} = \prod_{i=1}^p (1 + \lambda_i)^{-1}$$

5. Hotelling 提出統計量，經轉換，可變成 F 分配

在某些特別的與的情況下，可轉為 F 分配，如：

$$p = 2 \text{ 且 } k \geq 2 \text{ 時， } \frac{n-k}{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \right) \sim F_{2(k-1), 2(n-k-1)}$$

Hotelling 的可看成是單變量 t 統計量擴展成的多變量統計量。除了 Wilks'、Hotelling 外，Pillai 與 Roy 等人也提出不同方式的多變量的檢定統計量，在 SPSS 的多變量 GLM 將會出現並列出這四種統計量。

Example

- 今有40位國小學生配合不同性別及年齡，每10人為一組，採用不同教學法，一段時間後測驗其閱讀速度（ Y_1 ）及理解能力（ Y_2 ），問此四種教學法(I-IV)之效果有無差異。

I		II		III		IV	
Y1	Y2	Y1	Y2	Y1	Y2	Y1	Y2
7	9	43	21	24	14	27	17
37	16	39	17	30	15	20	13
44	16	21	9	17	8	25	15
28	14	32	16	34	15	13	11
42	16	21	9	32	16	32	17
23	11	14	6	35	17	4	10
45	25	24	11	19	11	3	7
32	15	24	12	6	6	36	19
37	16	26	12	30	14	28	16
45	19	26	12	19	10	21	15

Results of example

1. 在 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 下，
使用四種檢定法其結果是一致的，也就是拒絕 H_0 。
表示四種教學法有差異。
2. 同時亦可檢定在 $H_0 : \mu_1 = \mu_4$ 下，或者
 $H_0 : 2\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$ ，即表示探討：
第一種教學法和第四種教學法有否差異？和
第一種教學法的二倍效果等於第二種教學法
和第三種教學法的和？

MANOVA table of example

3. 從MANOVA表來看， Y_1 和 Y_2 測定項目亦無差異。

	Source	df	SS	MS	F	P-value
Y_1	Between (H)	3	914.075	304.692	2.81	P>0.05
	Within (E)	36	3901.300	108.369		
	Total (T)	39	4815.375			
Y_2	Between (H)	3	67.400	22.467	1.38	P>0.05
	Within (E)	36	587.000	16.306		
	Total (T)	39	654.400			

Results of example

4. 若兩變數間有某種線性組合，
其關係可由*Bartlett*之*V*檢定值測得。

↑

$$\left(V = \left(n - 1 - \frac{p + G}{2} \right) \log \frac{1}{\Lambda}, \quad n \text{ 夠大時}, \quad V \sim \chi_{pv_H} \right)$$

二因子多變量變異數分析

- 研究者同時控制二個自變項(A因子和B因子)。二因子MANOVA變異數分析除了可以檢定每個自變項的「主要效果」外，也可以同時檢驗兩個因子間的「交互作用效果」，已確定二個自變項間是否彼此獨立。
- 若交互效果達到顯著，則必須進一步檢驗「多變項單純主要效果 multivariate test of simple main effect」。

Two-way MANOVA

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^b \beta_j = 0, \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ for all } j, \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ for all } i$$

\Rightarrow

$$X_{ijk} = \bar{X} + (\bar{X}_{i..} - \bar{X}) + (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}) + (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}) + (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})$$

$$\bar{X}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n X_{ijk}}{bn}, \quad \bar{X}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n X_{ijk}}{an}, \quad \bar{X}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ijk}}{n}, \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n X_{ijk}}{abn}$$

Two-way MANOVA

$$X_{ijk} = \bar{X} + (\bar{X}_{i..} - \bar{X}) + (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}) + (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}) + (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})$$

$$SSPA = \sum \sum \sum (\bar{X}_{i..} - \bar{X})(\bar{X}_{i..} - \bar{X})'$$

$$SSPB = \sum \sum \sum (\bar{X}_{.j.} - \bar{X})(\bar{X}_{.j.} - \bar{X})'$$

$$SSPAB = \sum \sum \sum (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X})(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X})'$$

$$SSPE = \sum \sum \sum (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})'$$

$$SSPT = \sum \sum \sum (X_{ijk} - \bar{X})(X_{ijk} - \bar{X})'$$

$$SSPA + SSPB + SSPAB + SSPE = SSPT$$

MANOVA table

Source	df	SS	MS	Wilks Λ Testing
SSPA	$an-1$.	SS/df	$SSPA/(SSPE+SSPA)$
SSPB	$bn-1$.	.	$SSPB/(SSPE+SSPB)$
SSPAB	$(a-1)(b-1)$.	.	$SSPAB/(SSPE+SSPAB)$
SSPE		.	.	
SSPT	$abn-1$			

二因子多變量變異數分析表

變異來源	df (自由度)	SSCP矩陣	Λ
A	a-1	Q_A	$\frac{ Q_E }{ Q_A + Q_E }$
B	b-1	Q_B	
A×B	(a-1)×(b-1)	Q_{AB}	$\frac{ Q_E }{ Q_B + Q_E }$
誤差	ab(n-1)	Q_E	$\frac{ Q_E }{ Q_{AB} + Q_E }$
全體	N-1	$Q_T = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_E$	

兩因子MANOVA

1. 檢定A的主效用

$$\Lambda = \frac{|SSPE|}{|SSPE + SSPA|}$$

2. 檢定B的主效用

$$\Lambda = \frac{|SSPE|}{|SSPE + SSPB|}$$

3. 檢定A、B的交互作用

$$\Lambda = \frac{|SSPE|}{|SSPE + SSPAB|}$$

- Bartlett提出對值轉換後，可得到接近卡方分配的檢定統計量為：

$$-\left(rs(n-1) - \frac{(p+1) - (r-1)(s-1)}{2} \right) \ln(\Lambda) > \chi_{(r-1)(s-1)p, \alpha}^2$$

二因子多變量變異數分析

- 二因子分析步驟如下：假定A因子有二個水準，B因子有三個水準。單純主要效果則檢定：A在b1、A在b2、A在b3、B在a1、B在a2之MANOVA分析。如果有達到顯著，則進一步進行單因子ANOVA分析及事後比較。
- 如果二因子MANOVA交互作用未達顯著水準，則進一步檢驗二個自變項的主要效果，此時及分別進行以下的二個分析：
 - (1)A因子MANOVA分析;
 - (2)B因子MANOVA分析。

二因子多變量變異數分析表

- 二因子MANOVA單純主要效果檢驗表：

變異來源	df	SSCP	Λ
Aat			
b1	a-1	$Q_{A-at-b1}$	$\frac{ Q_e }{ Q_{A-at-b1} + Q_e }$
b2	a-1	$Q_{A-at-b2}$	$\frac{ Q_e }{ Q_{A-at-b2} + Q_e }$
b3	a-1	$Q_{A-at-b3}$	$\frac{ Q_e }{ Q_{A-at-b3} + Q_e }$
Bat			
a1	b-1	$Q_{B-at-a1}$	$\frac{ Q_e }{ Q_{B-at-a1} + Q_e }$
a2	b-1	$Q_{B-at-a2}$	$\frac{ Q_e }{ Q_{B-at-a2} + Q_e }$
誤差	ab(n-1)	Q_e	

n為細格人數，a為A因子的水準數（第例為2），b為B因子的水準數（第例為2）

Remark

- **選取變項為一邏輯與研究假設**，而非統計問題：MANOVA所分析的變項必須以理論或實徵性研究為挑選依據，而非先盲目分析一大推變項，在挑選解釋量較大的進行分析。以統計為選擇變項依據的作法，可能遭遇下列問題：
 - a. 統計所分析資料的信度或效度可能不佳。
 - b. 盲目嘗試後，如何合理解釋？
 - c. 忽略理論架構，而太相信統計分析，此種研究結果，缺乏嚴謹性。
 - d. 所用的統計技術是否適切，一種資料可能適用多種統計分法，而不同統計方法可能造成不同結果？

Example 1

- 在一項國中學生學習生活壓力的研究中，研究者編制一份「國中學生學習壓力量表」，量表經預試結果，以探索性分析求其建構效度，量表共包含三個向度：「課堂壓力」、「考試壓力」、「期望壓力」，研究者想探究的研究問題如下：
 - 1. 不同性別(男生、女生)的學生其學習壓力是否有顯著差異存在？
 - 2. 不同年級(一、二、三年級)的學生其學習壓力是否有顯著差異存在？
 - 3. 不同社經地位(高、中、低)的學生其學習壓力是否有顯著差異存在？

Example 1

- 依變項：「課堂壓力」、「考試壓力」、「期望壓力」。
- 二分名義變項：不同性別(男生、女生)
- 三分名義變項：不同年級(一、二、三年級)的學生
- 三分名義變項：不同社經地位(高、中、低)的學生
- 三個向度為等距量尺，學習壓力向度之測量值越大，表示學生所知覺的壓力越大。

Exam

The screenshot shows the SPSS software interface. The 'Analyze' menu is open, and 'General Linear Model' is selected. The 'Multivariate' dialog box is open, showing the following settings:

- Dependent Variables: 課堂壓力, 考試壓力, 期望壓力
- Fixed Factor(s): 年級, 性別, 社經地位

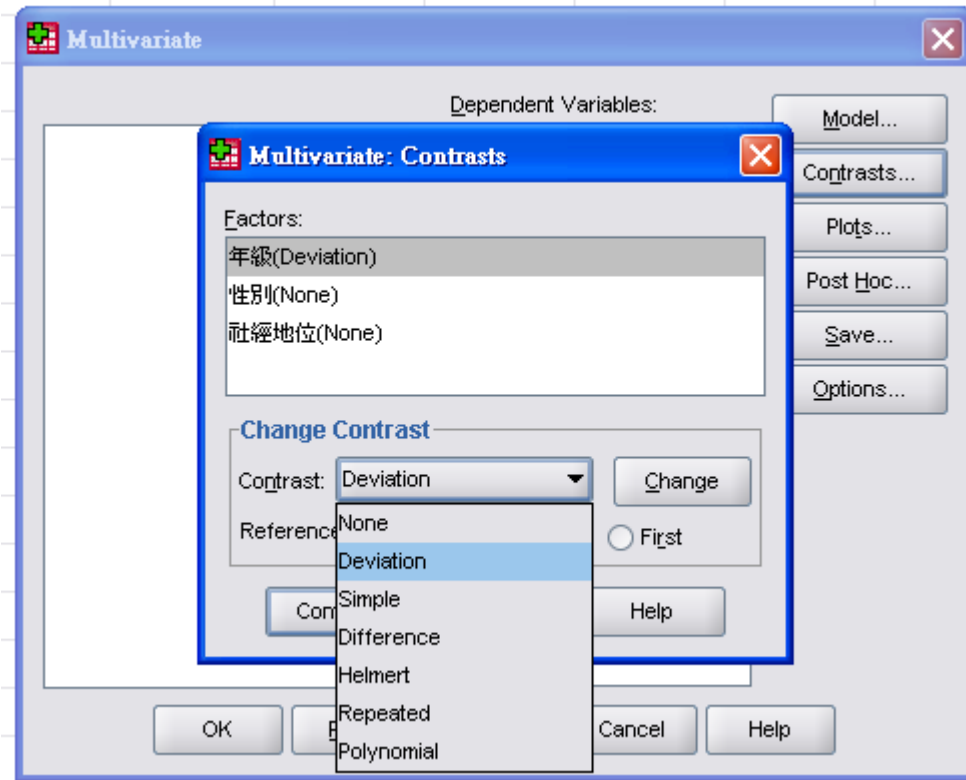
The dialog box also includes buttons for Model..., Contrasts..., Plots..., Post Hoc..., Save..., and Options... at the bottom right, and OK, Paste, Reset, Cancel, and Help buttons at the bottom.

個數需要二個以上之連續變數

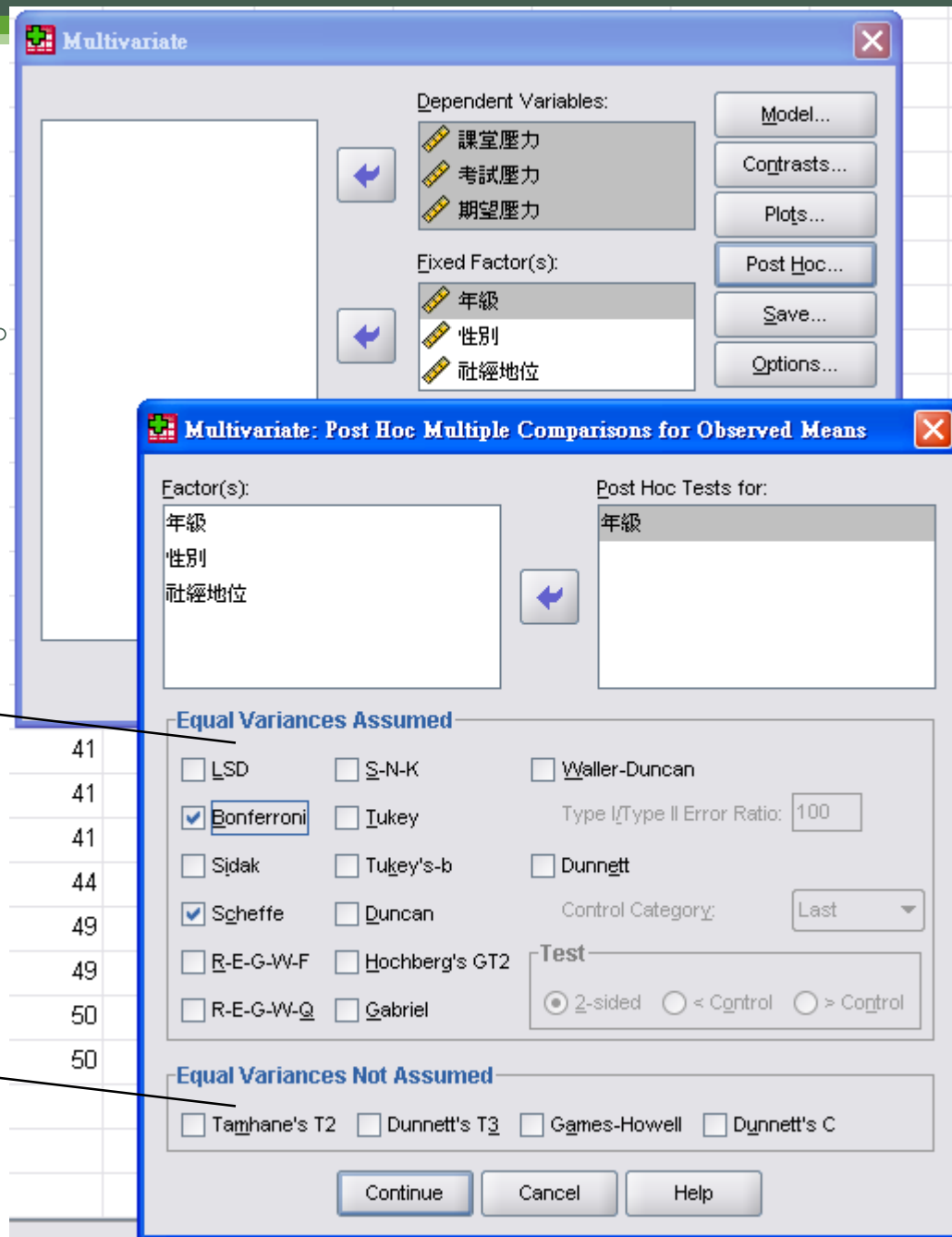
必須為名義變數或次序變數

Example 1

- 進行事前多重比較，選擇離差法。



- 進行事後多重比較。



未違反變異數同質性假定下使用

違反變異數同質性假定下使用

Between-Subjects Factors

	Value Label	N
年級 1	一年級	10
2	二年級	10
3	三年級	10

Descriptive Statistics

	年級	Mean	Std. Deviation	N
課堂壓力	一年級	30.00	6.325	10
	二年級	40.80	5.493	10
	三年級	28.90	6.790	10
	Total	33.23	8.118	30
考試壓力	一年級	29.70	4.138	10
	二年級	35.20	4.940	10
	三年級	47.50	2.461	10
	Total	37.47	8.488	30
期望壓力	一年級	35.70	6.395	10
	二年級	35.80	7.729	10
	三年級	38.50	6.704	10
	Total	36.67	6.850	30

- **Box's Test**顯著，表示未符合變異數同質性檢定。必須進行校正或資料轉換。由於Box's M對樣本大小特別敏感，若樣本數大，可以考慮顯著水準小。此題可考慮設為0.01。

Box's Test of Equality of Covariance Matrices^a

Box's M	25.534
F	1.779
df1	12
df2	3.533E3
Sig.	.046

Tests the null hypothesis that the observed covariance matrices of the dependent variables are equal across groups.

a. Design: Intercept + 年級

- 個別變異數同質性檢定，均未達顯著水準。

Levene's Test of Equality of Error Variances^a

	F	df1	df2	Sig.
課堂壓力	.411	2	27	.667
考試壓力	1.675	2	27	.206
期望壓力	.218	2	27	.806

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + 年級

- 多變量顯著性結果皆為顯著，表示至少有一依變項平均數有顯著差異。可進行單變量檢定。

Multivariate Tests^a

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.	Partial Eta Squared
Intercept	Pillai's Trace	.994	1.346E3 ^a	3.000	25.000	.000	.994
	Wilks' Lambda	.006	1.346E3 ^a	3.000	25.000	.000	.994
	Hotelling's Trace	161.555	1.346E3 ^a	3.000	25.000	.000	.994
	Roy's Largest Root	161.555	1.346E3 ^a	3.000	25.000	.000	.994
年級	Pillai's Trace	1.262	14.817	6.000	52.000	.000	.631
	Wilks' Lambda	.101	17.840 ^a	6.000	50.000	.000	.682
	Hotelling's Trace	5.281	21.126	6.000	48.000	.000	.725
	Roy's Largest Root	4.482	38.842 ^b	3.000	26.000	.000	.818

a. Exact statistic

b. The statistic is an upper bound on F that yields a lower bound on the significance level.

c. Design: Intercept + 年級

- 受試者間效應項的檢定：其中期望壓力不顯著，表示期望壓力向度的感受沒有顯著

Tests of Between-Subjects Effects

Source	Dependent ...	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	課堂壓力	864.867 ^a	2	432.433	11.157	.000	.452
	考試壓力	1661.267 ^b	2	830.633	52.375	.000	.795
	期望壓力	50.467 ^c	2	25.233	.520	.600	.037
Intercept	課堂壓力	33133.633	1	33133.633	854.857	.000	.969
	考試壓力	42112.533	1	42112.533	2.655E3	.000	.990
	期望壓力	40333.333	1	40333.333	831.171	.000	.969
年級	課堂壓力	864.867	2	432.433	11.157	.000	.452
	考試壓力	1661.267	2	830.633	52.375	.000	.795
	期望壓力	50.467	2	25.233	.520	.600	.037
Error	課堂壓力	1046.500	27	38.759			
	考試壓力	428.200	27	15.859			
	期望壓力	1310.200	27	48.526			
Total	課堂壓力	35045.000	30				
	考試壓力	44202.000	30				
	期望壓力	41694.000	30				
Corrected Total	課堂壓力	1911.367	29				
	考試壓力	2089.467	29				
	期望壓力	1360.667	29				

a. R Squared = .452 (Adjusted R Squared = .412)

b. R Squared = .795 (Adjusted R Squared = .780)

c. R Squared = .037 (Adjusted R Squared = -.034)

Parameter Estimates

Dependent Variable	Parameter	B	Std. Error	t	Sig.	95% Confidence Interval		Partial Eta Squared
						Lower Bound	Upper Bound	
課堂壓力	Intercept	28.900	1.969	14.679	.000	24.860	32.940	.889
	[年級=1]	1.100	2.784	.395	.696	-4.613	6.813	.006
	[年級=2]	11.900	2.784	4.274	.000	6.187	17.613	.404
	[年級=3]	0 ^a
考試壓力	Intercept	47.500	1.259	37.718	.000	44.916	50.084	.981
	[年級=1]	-17.800	1.781	-9.995	.000	-21.454	-14.146	.787
	[年級=2]	-12.300	1.781	-6.906	.000	-15.954	-8.646	.639
	[年級=3]	0 ^a
期望壓力	Intercept	38.500	2.203	17.477	.000	33.980	43.020	.919
	[年級=1]	-2.800	3.115	-.899	.377	-9.192	3.592	.029
	[年級=2]	-2.700	3.115	-.867	.394	-9.092	3.692	.027
	[年級=3]	0 ^a

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

Post Hoc

年

Multiple Comparisons

Bonferroni

Dependent Variable	(I) 年級	(J) 年級	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
課堂壓力	一年級	二年級	-10.80 [*]	2.784	.002	-17.91	-3.69
		三年級	1.10	2.784	1.000	-6.01	8.21
	二年級	一年級	10.80 [*]	2.784	.002	3.69	17.91
		三年級	11.90 [*]	2.784	.001	4.79	19.01
	三年級	一年級	-1.10	2.784	1.000	-8.21	6.01
		二年級	-11.90 [*]	2.784	.001	-19.01	-4.79
考試壓力	一年級	二年級	-5.50 [*]	1.781	.014	-10.05	-.95
		三年級	-17.80 [*]	1.781	.000	-22.35	-13.25
	二年級	一年級	5.50 [*]	1.781	.014	.95	10.05
		三年級	-12.30 [*]	1.781	.000	-16.85	-7.75
	三年級	一年級	17.80 [*]	1.781	.000	13.25	22.35
		二年級	12.30 [*]	1.781	.000	7.75	16.85
期望壓力	一年級	二年級	-.10	3.115	1.000	-8.05	7.85
		三年級	-2.80	3.115	1.000	-10.75	5.15
	二年級	一年級	.10	3.115	1.000	-7.85	8.05
		三年級	-2.70	3.115	1.000	-10.65	5.25
	三年級	一年級	2.80	3.115	1.000	-5.15	10.75
		二年級	2.70	3.115	1.000	-5.25	10.65

Based on observed means.
The error term is Mean Square(Error) = 48.526.

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Example 2

- 二因子多變量變異數分析:某位輔導老師想探究不同學校類型（公立與私立）與不同年及的高職學生在「生活壓力」的感受是否有顯著交互作用，採分層隨機取樣方式。
- 從公立高職、私立高職中各取15為學生(每年級各5位)、全部樣本有30位。「生活壓力量表」經探索性因素分析結果，包含三個向度：「學業壓力」、「經濟壓力」、「情感壓力」。

Exam

Transform Analyze Graphs Utilities Add-ons Window Help

年級 學業壓力 經濟壓力 情感壓力 var var var var var var

1	1	7	4	6							
2	1	4	8	4							
2	1	5	9	3							
2	1	3	10	6							
2	2	8	5	7							
2	2	7	6	8							
2	2	8	5	3							

Multivariate

Dependent Variables:
學業壓力
經濟壓力
情感壓力

Fixed Factor(s):
類別
年級

Covariate(s):

WLS Weight:

Model...
Contrasts...
Plots...
Post Hoc...
Save...
Options...

OK Paste Reset Cancel Help

Multivariate: Options

Estimated Marginal Means

Factor(s) and Factor Interactions:
(OVERALL)
類別
年級
類別*年級

Display Means for:
類別
年級
類別*年級

Compare main effects

Confidence interval adjustment:
LSD(none)

Display

Descriptive statistics Transformation matrix
 Estimates of effect size Homogeneity tests
 Observed power Spread vs. level plot
 Parameter estimates Residual plot
 SSCP matrices Lack of fit
 Residual SSCP matrix General estimable function

Significance level: .05 Confidence intervals are 95.0%

Continue Cancel Help

Example 2

- Box's Test未違反「變異數-共變數矩陣同質性」

Between-Subjects Factors

		Value Label	N
類別	1	公立	15
	2	私立	15
年級	1	一年級	10
	2	二年級	10
	3	三年級	10

Box's Test of Equality of Covariance Matrices^a

Box's M	49.690
F	1.095
df1	30
df2	1.302E3
Sig.	.332

Tests the null hypothesis that the observed covariance matrices of the dependent variables are equal across groups.

a. Design: Intercept + 類別 + 年級 + 類別 * 年級

Example 2

Multivariate Tests^a

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
Intercept	Pillai's Trace	.996	1.666E3 ^a	3.000	22.000	.000
	Wilks' Lambda	.004	1.666E3 ^a	3.000	22.000	.000
	Hotelling's Trace	227.202	1.666E3 ^a	3.000	22.000	.000
	Roy's Largest Root	227.202	1.666E3 ^a	3.000	22.000	.000
類別	Pillai's Trace	.579	10.079 ^a	3.000	22.000	.000
	Wilks' Lambda	.421	10.079 ^a	3.000	22.000	.000
	Hotelling's Trace	1.374	10.079 ^a	3.000	22.000	.000
	Roy's Largest Root	1.374	10.079 ^a	3.000	22.000	.000
年級	Pillai's Trace	1.404	18.081	6.000	46.000	.000
	Wilks' Lambda	.072	20.019 ^a	6.000	44.000	.000
	Hotelling's Trace	6.285	21.997	6.000	42.000	.000
	Roy's Largest Root	4.945	37.908 ^b	3.000	23.000	.000
類別 * 年級	Pillai's Trace	.618	3.429	6.000	46.000	.007
	Wilks' Lambda	.383	4.515 ^a	6.000	44.000	.001
	Hotelling's Trace	1.607	5.626	6.000	42.000	.000
	Roy's Largest Root	1.605	12.308 ^b	3.000	23.000	.000

表示兩變項並不獨立，類別變項在生活壓力平均向量的差異會受到年級變項的影響

a. Exact statistic

b. The statistic is an upper bound on F that yields a lower bound on the significance level.

c. Design: Intercept + 類別 + 年級 + 類別 * 年級

存在二固定因子的交互作用項，需進一步進行「單純主要效果」的MANOVA顯著性檢定。

Tests of Between-Subjects Effects

Source	Dependent ...	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	學業壓力	67.467 ^a	5	13.493	16.192	.000
	經濟壓力	167.467 ^b	5	33.493	23.642	.000
	情感壓力	10.267 ^c	5	2.053	.428	.825
Intercept	學業壓力	1702.533	1	1702.533	2.043E3	.000
	經濟壓力	1128.533	1	1128.533	796.612	.000
	情感壓力	1128.533	1	1128.533	235.111	.000
類別	學業壓力	19.200	1	19.200	23.040	.000
	經濟壓力	34.133	1	34.133	24.094	.000
	情感壓力	3.333	1	3.333	.694	.413
年級	學業壓力	44.067	2	22.033	26.440	.000
	經濟壓力	81.067	2	40.533	28.612	.000
	情感壓力	2.467	2	1.233	.257	.776
類別 * 年級	學業壓力	4.200	2	2.100	2.520	.102
	經濟壓力	52.267	2	26.133	18.447	.000
	情感壓力	4.467	2	2.233	.465	.634
Error	學業壓力	20.000	24	.833		
	經濟壓力	34.000	24	1.417		
	情感壓力	115.200	24	4.800		
Total	學業壓力	1790.000	30			
	經濟壓力	1330.000	30			
	情感壓力	1254.000	30			
Corrected Total	學業壓力	87.467	29			
	經濟壓力	201.467	29			
	情感壓力	125.467	29			

a. R Squared = .771 (Adjusted R Squared = .724)

b. R Squared = .831 (Adjusted R Squared = .796)

c. R Squared = .082 (Adjusted R Squared = -.109)

- 交互作用顯著，表示樣本在三個依變項中至少有一個依變項在二個固定因子的交互作用達到顯著的。

交互作用主要由經濟壓力造成

Data Transform Analyze Graphs Utilities Add-ons Window Help

類別	年級	學業壓力	經濟壓力	情感壓力	var	va
1	1	7	4	6		
1	1	8	4	7		

Split File

Analyze all cases, do not create groups

Compare groups

Organize output by groups

Groups Based on:

類別

Sort the file by grouping variables

File is already sorted

Current Status: Analysis by groups is off.

OK Paste Reset Cancel Help

Example 2

- 在固定類別=公立的條件下，年級在三個學習壓力變項中之單因子多變量變異數分析，顯示顯著。也就是至少有一依變項在年級變項的差異達到顯著。

Multivariate Tests^{c,d}

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
Intercept	Pillai's Trace	.997	1.115E3 ^a	3.000	10.000	.000
	Wilks' Lambda	.003	1.115E3 ^a	3.000	10.000	.000
	Hotelling's Trace	334.625	1.115E3 ^a	3.000	10.000	.000
	Roy's Largest Root	334.625	1.115E3 ^a	3.000	10.000	.000
年級	Pillai's Trace	1.287	6.621	6.000	22.000	.000
	Wilks' Lambda	.051	11.422 ^a	6.000	20.000	.000
	Hotelling's Trace	11.968	17.952	6.000	18.000	.000
	Roy's Largest Root	11.386	41.747 ^b	3.000	11.000	.000

a. Exact statistic

b. The statistic is an upper bound on F that yields a lower bound on the significance level.

c. 類別 = 公立

d. Design: Intercept + 年級

Example 2

Tests of Between-Subjects Effects^d

Source	Dependent ...	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	學業壓力	10.533 ^a	2	5.267	9.294	.004
	經濟壓力	83.733 ^b	2	41.867	38.061	.000
	情感壓力	.400 ^c	2	.200	.039	.962
Intercept	學業壓力	1041.667	1	1041.667	1.838E3	.000
	經濟壓力	385.067	1	385.067	350.061	.000
	情感壓力	504.600	1	504.600	97.665	.000
年級	學業壓力	10.533	2	5.267	9.294	.004
	經濟壓力	83.733	2	41.867	38.061	.000
	情感壓力	.400	2	.200	.039	.962
Error	學業壓力	6.800	12	.567		
	經濟壓力	13.200	12	1.100		
	情感壓力	62.000	12	5.167		
Total	學業壓力	1059.000	15			
	經濟壓力	482.000	15			
	情感壓力	567.000	15			
Corrected Total	學業壓力	17.333	14			
	經濟壓力	96.933	14			
	情感壓力	62.400	14			

a. R Squared = .608 (Adjusted R Squared = .542)

b. R Squared = .864 (Adjusted R Squared = .841)

c. R Squared = .006 (Adjusted R Squared = -.159)

d. 類別 = 公立

Example 2

- 事後比較

Multiple Comparisons^a

Tukey HSD

Dependent Variable	(I) 年級	(J) 年級	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
學業壓力	一年級	二年級	-1.40*	.476	.031	-2.67	-.13
		三年級	-2.00*	.476	.003	-3.27	-.73
	二年級	一年級	1.40*	.476	.031	.13	2.67
		三年級	-.60	.476	.443	-1.87	.67
	三年級	一年級	2.00*	.476	.003	.73	3.27
		二年級	.60	.476	.443	-.67	1.87
經濟壓力	一年級	二年級	.40	.663	.821	-1.37	2.17
		三年級	-4.80*	.663	.000	-6.57	-3.03
	二年級	一年級	-.40	.663	.821	-2.17	1.37
		三年級	-5.20*	.663	.000	-6.97	-3.43
	三年級	一年級	4.80*	.663	.000	3.03	6.57
		二年級	5.20*	.663	.000	3.43	6.97
情感壓力	一年級	二年級	.40	1.438	.958	-3.44	4.24
		三年級	.20	1.438	.989	-3.64	4.04
	二年級	一年級	-.40	1.438	.958	-4.24	3.44
		三年級	-.20	1.438	.989	-4.04	3.64
	三年級	一年級	-.20	1.438	.989	-4.04	3.64
		二年級	.20	1.438	.989	-3.64	4.04

Based on observed means.

The error term is Mean Square(Error) = 5.167.

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Example 3

- 同樣地，也可以看，
- 1. 固定類別=私立的條件下的單純主要效果。
- 2. 設定年級，看年級變項在類別上的單純主要效果。

- 結論：
- 1.就公立學校群體而言：三年級學生在「學業壓力」與「經濟壓力」二個向度的感受有顯著不同。
在「學業壓力」向度方面，二年級及三年級學生顯著高於一年級學生；在「經濟壓力」向度方面，三年級學生顯著高於一年級及二年級學生。
- 2.就私立學校群體而言：...
- 3.就一年級群體而言：...
- 4.就二年級群體而言：...